ФН4, 2 курс, 3 семестр, 2015/16 уч.год

Дифференциальная геометрия и основы тензорного исчисления

Домашнее задание № 1

"Кривые и поверхности в пространстве"

Поверхность задана параметрическими уравнениями $S : \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(u, v)$.

1. Найти особые точки параметризованной поверхности **(1)**. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности в точках P_1, P_2 **(1)**.

2. Исследовать зависимость вида поверхности от области изменения параметров (u, v) **(3)**. Составить уравнения координатных линий **(1)**. Построить поверхность и координатную сеть на ней **(2)**.

3. Вычислить первую квадратичную форму поверхности **(1)**. Вычислить угол между кривыми $u = v^2$ и $u = v$ в точке их пересечения **(2)**.

4. Вычислить вторую квадратичную форму поверхности **(2)**. Определить типы точек поверхности **(1)**.

5. Найти главные направления и главные кривизны в точках P_1, P_2 **(3)**. Вычислить среднюю и гауссову кривизны поверхности в точках P_1, P_2 **(1)**.

6. Вычислить кривизну кривой γ в точках P_1 и P_2 **(2)**. В одной из точек построить репер Френе **(2)**.

Примечания.

1. Для особых точек задания пп. 1,5,6 не выполняются.

2. Каждое задание оценивается целым числом баллов. В скобках указаны максимальные баллы за каждое задание. Максимально возможное число баллов за домашнее задание №1 — 22 балла. Минимальное зачетное число баллов за домашнее задание №1 — 14 баллов.

3. Нумерация задач: **G** — **V**

   - **G** — номер группы (1 – ФН4-31, 2 – ФН4-32),
   - **V** — номер варианта.

4. Срок сдачи домашнего задания №1 — 8 неделя.

1–1. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{2\operatorname{sh}u\cos v,\ 2\operatorname{sh}u\sin v,\ 3\operatorname{ch}u\};\ \gamma: u=v;\ P_1(0,0,3),\ P_2(-2\operatorname{sh}\pi,0,3\operatorname{ch}\pi).$

1–2. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{2\operatorname{ch}u\cos v,\ 2\operatorname{ch}u\sin v,\ 3\operatorname{sh}u\};\ \gamma: u=v;\ ;\ P_1(2,0,0),\ P_2(-2\operatorname{ch}\pi,0,3\operatorname{sh}\pi).$

1–3. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{u\cos v,\ u^2,\ 2u\sin v\};\ \gamma: u=v;\ P_1(0,0,0),\ P_2(-\pi,\pi^2,0).$

1–4. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{5u\cos v,\ 4u\sin v,\ u\};\ \gamma: u=1,\ v=t;\ P_1(5,0,1),\ P_2(0,4,1).$

1–5. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{\cos u\cos v,\ 3\sin u,\ \cos u\sin v\};\ \gamma: u=v;\ P_1(1,0,0),\ P_2(0,3,0).$

1–6. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{2(u+v),\ 3(u-v),\ 2uv\};\ \gamma: u=t^2,\ v=t;\ P_1(0,0,0),\ P_2(4,0,2).$

1–7. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{2u\cos v,\ 3u\sin v,\ u^2\};\ \gamma: u=v;\ P_1(0,0,0),\ P_2(-2\pi,0,\pi^2).$

1–8. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{2\operatorname{ch}u\sin v,\ 2\operatorname{ch}u\cos v,\ 5\operatorname{sh}u\};\ \gamma: u=v;\ P_1(0,2,0),\ P_2(0,-2\operatorname{ch}\pi,5\operatorname{sh}\pi).$

1–9. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{2\cos u\sin v,\ 2\cos u\cos v,\ 5\sin u\};\ \gamma: u=v;\ P_1(0,2,0),\ P_2(0,0,5).$

1–10. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{u\sin v,\ u,\ 4u\cos v\};\ \gamma: u=1,\ v=t;\ P_1(0,1,4),\ P_2(1,1,0).$

1–11. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{u-v,\ 2uv, 4(u+v)\};\ \gamma: u=t^2,\ v=t;\ P_1(0,0,0),\ P_2(0,2,8).$

1–12. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{u\sin v,\ u^2,\ 4u\cos v\};\ \gamma: u=v;\ P_1(0,0,0),\ P_2(0,\pi^2,-4\pi).$

1–13. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{5\operatorname{ch}u\sin v,\ \operatorname{sh}u,\ 5\operatorname{ch}u\cos v\};\ \gamma: u=v;\ P_1(0,0,5),\ P_2(0,\operatorname{sh}\pi,-5\operatorname{ch}\pi).$

1–14. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{5\cos u\sin v,\ \sin u,\ 5\cos u\cos v\};\ \gamma: u=v;\ P_1(0,0,5),\ P_2(0,1,0).$

1–15. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{u\cos v,\ u,\ 5u\sin v\};\ \gamma: u=1,\ v=t;\ P_1(1,1,0);\ P_2(0,1,5).$

1–16. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{u+v,\ 2uv,\ 3(u-v)\};\ \gamma: u=t^2,\ v=t;\ P_1(0,0,0),\ P_2(2,2,0).$

1–17. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{u\cos v,\ u^2,\ 5u\sin v\};\ \gamma: u=v;\ P_1(0,0,0),\ P_2(-\pi,\pi^2,0).$

1–18. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{\operatorname{sh}u\cos v,\ 3\operatorname{ch}u,\ \operatorname{sh}u\sin v\};\ \gamma: u=v;\ P_1(0,3,0),\ P_2(-\operatorname{sh}\pi,3\operatorname{ch}\pi,0).$

1–19. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{\operatorname{ch}u\cos v,\ 5\operatorname{sh}u,\ \operatorname{ch}u\sin v\};\ \gamma: u=v;\ P_1(1,0,0),\ P_2(-1\operatorname{ch}\pi,5\operatorname{sh}\pi,0).$

1–20. $\vec{\mathbf{r}}(u,v)=\{2\cos u\cos v,\ 2\cos u\sin v,\ 3\sin u\};\ \gamma: u=v;\ P_1(2,0,0),\ P_2(0,0,3).$

2–1. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{5(u+v),\ 4(u-v),\ 2uv\};\ \gamma : u = t^2,\ v = t;\ P_1(0,0,0),\ P_2(10,0,2).$

2–2. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{\operatorname{sh} u \cos v,\ 2\operatorname{ch} u,\ \operatorname{sh} u \sin v\};\ \gamma : u = v;\ P_1(0,2,0),\ P_2(-\operatorname{sh}\pi, 2\operatorname{ch}\pi, 0).$

2–3. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{2u\cos v,\ 3u\sin v,\ u\};\ \gamma : u = 1,\ v = t;\ P_1(2,0,1),\ P_2(0,3,1).$

2–4. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{5\operatorname{sh} u\cos v,\ 5\operatorname{sh} u\sin v,\ 4\operatorname{ch} u\};\ \gamma : u = v;\ P_1(0,0,4),\ P_2(-5\operatorname{sh}\pi, 0, 4\operatorname{ch}\pi).$

2–5. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{5\operatorname{ch} u\cos v,\ 5\operatorname{ch} u\sin v,\ 4\operatorname{sh} u\};\ \gamma : u = v;\ P_1(5,0,0),\ P_2(-5\operatorname{ch}\pi, 0, 4\operatorname{sh}\pi).$

2–6. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{5\cos u\cos v,\ 5\cos u\sin v,\ 4\sin u\};\ \gamma : u = v;\ P_1(5,0,0),\ P_2(0,0,4).$

2–7. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{u,\ 4u\sin v,\ u\cos v\};\ \gamma : u = 1,\ v = t;\ P_1(1,0,1),\ P_2(1,4,0).$

2–8. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{2uv,\ 4(u-v),\ u+v\};\ \gamma : u = t^2,\ v = t;\ P_1(0,0,0);\ P_2(2,0,2).$

2–9. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{u^2,\ 4u\sin v,\ u\cos v\};\ \gamma : u = v;\ P_1(0,0,0),\ P_2(\pi^2, 0, -\pi).$

2–10. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{4\operatorname{ch} u,\ \operatorname{sh} u\sin v,\ \operatorname{sh} u\cos v\};\ \gamma : u = v;\ P_1(4,0,0),\ P_2(4\operatorname{ch}\pi, 0, -\operatorname{sh}\pi).$

2–11. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{4\operatorname{sh} u,\ \operatorname{ch} u\sin v,\ \operatorname{ch} u\cos v\};\ \gamma : u = v;\ P_1(0,0,1),\ P_2(4\operatorname{sh}\pi, 0, -\operatorname{ch}\pi).$

2–12. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{4\sin u,\ \cos u\sin v,\ \cos u\cos v\};\ \gamma : u = v;\ P_1(0,0,1),\ P_2(4,0,0).$

2–13. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{5u\sin v,\ 2u\cos v,\ u^2\};\ \gamma : u = v;\ P_1(0,0,0),\ P_2(0, -2\pi, \pi^2).$

2–14. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{2uv,\ 2(u+v),\ 4(u-v)\};\ \gamma : u = t^2,\ v = t;\ P_1(0,0,0),\ P_2(2,4,0).$

2–15. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{u^2,\ 2u\cos v,\ 4u\sin v\};\ \gamma : u = v;\ P_1(0,0,0),\ P_2(\pi^2, -2\pi, 0).$

2–16. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{4\operatorname{ch} u,\ 2\operatorname{sh} u\cos v,\ 2\operatorname{sh} u\sin v\};\ \gamma : u = v;\ P_1(4,0,0),\ P_2(4\operatorname{ch}\pi, -2\operatorname{sh}\pi, 0).$

2–17. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{\operatorname{sh} u,\ 2\operatorname{ch} u\cos v,\ 2\operatorname{ch} u\sin v\};\ \gamma : u = v;\ P_1(0,2,0),\ P_2(\operatorname{sh}\pi, -2\operatorname{ch}\pi, 0).$

2–18. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{\sin u,\ 2\cos u\cos v,\ 2\cos u\sin v\};\ \gamma : u = v;\ P_1(0,2,0),\ P_2(1,0,0).$

2–19. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{5u\sin v,\ 2u\cos v,\ u\};\ \gamma : u = 1,\ v = t;\ P_1(0,2,1),\ P_2(5,0,1).$

2–20. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{5(u-v),\ 2(u+v),\ 2uv\};\ \gamma : u = t^2,\ v = t;\ P_1(0,0,0),\ P_2(0,4,2).$

2–21. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{u,\ 2u\cos v,\ 4u\sin v\};\ \gamma : u = 1,\ v = t;\ P_1(1,2,0),\ P_2(1,0,4).$

2–22. $\vec{\mathbf{r}}(u,v) = \{5u\cos v,\ 4u\sin v,\ u^2\};\ \gamma : u = v;\ P_1(0,0,0),\ P_2(-5\pi, 0, \pi^2).$